Nombres entiers

A5

Exercice corrigé

Sur un circuit automobile électrique une voiture jaune fait un tour en 12 s, une voiture bleue fait un tour en 15 s. Elles partent en même temps de la ligne d'arrivée. Au bout de combien de temps passeront-elles à nouveau cette ligne en même temps ?

Correction

Les temps de passage de la voiture jaune sont des multiples de 12. Les temps de passage de la voiture bleue sont des multiples de 15.

Les deux voitures se retrouveront en même temps sur la ligne d'arrivée tous les multiples communs de 12 et de 15.

Le plus petit multiple commun à 12 et 15 est 60.

Après le départ, il faudra attendre 60 s pour voir les deux voitures franchir la ligne d'arrivée en même temps.

1 Division euclidienne

Calcule le nombre n sachant que :

a. dans la division euclidienne de 71 par n, le quotient est 5 et le reste 6.

....

b. dans la division euclidienne de 148 par 19, le quotient est 7 et le reste n.

....

2 On donne l'égalité $9\,462 = 219 \times 43 + 45$. Quel est le reste de la division euclidienne :

a. de 9 462 par 219 ? ....

b. de 9 462 par 43 ? ....

3 Pour tondre la pelouse du stade du village, Akim utilise une tondeuse dont la largeur de coupe est 216 cm. Le terrain mesure 97 m de long et 69 m de large. Pour parcourir la distance la plus courte, doit-il tondre parallèlement à la longueur du terrain ou parallèlement à sa largeur ?

....

....

....

....

....

4 Dans un logiciel, l'instruction 

permet de calculer le reste d'une division euclidienne. Complète les pointillés dans le script suivant.

5 Calcule $6 \times 11 \times 5$. Déduis-en que 55 est un diviseur de 660.

....

....

6 Cite un nombre compris entre 20 et 50, à la fois :

a. divisible par 3 et 5. ....

b. divisible par 2 et 9. ....

7 Devinette

Compris entre 2 336 et 2 352, je suis divisible par 2 et 3 mais pas par 4 ni par 9. Qui suis-je ?

....

8 Diviseurs

a. Écris 1 001 en produit de 3 nombres premiers.

....

b. Déduis-en l'ensemble de ses diviseurs autres que 1 et lui-même.

....

....

9 Produits de facteurs premiers

Voici les décompositions en produits de facteurs premiers de deux nombres x et y :

$x = 3^4 \times 7$ $\qquad$ $y = 2 \times 3^5 \times 7^2$

y est-il un multiple de x ?

....

....

Série 1 Utiliser des multiples et des diviseurs

10 Multiples communs

a. En écrivant les dix premiers multiples de 30 et de 42, trouve leur plus petit multiple commun.

b. Calcule la différence $\frac{7}{30} - \frac{-3}{42}$.

11 Multiples de 24

a. Comment s'écrit un multiple de 24 ?

b. Démontre qu'un multiple de 24 est également un multiple de 4.

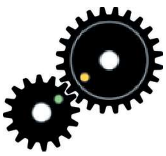
c. Démontre que la somme de deux multiples de 24 est un multiple de 24.

12 La lumière blanche d'un phare maritime clignote toutes les 180 s. Sa lumière verte clignote toutes les 56 s. À minuit, les deux lumières se déclenchent en même temps.

a. Peuvent-elles se déclencher à nouveau ensemble au bout de 360 s ? Justifie.

b. À quelle heure se déclencheront-elles à nouveau en même temps ?

13 Un engrenage comprend deux roues de 24 et 16 dents. Détermine le nombre de tours que doit faire chaque roue pour revenir dans cette position.



14 Un pâtissier dispose de 450 morceaux de pommes et de 315 framboises. Il veut préparer le maximum de tartelettes identiques en utilisant tous les fruits.

a. Peut-il préparer 15 tartelettes ? 21 tartelettes ?

b. Trouve les diviseurs communs de 450 et 315.

c. Combien de tartelettes ce pâtissier va-t-il faire ?

15 Un fleuriste a reçu 1 756 tulipes et 1 317 œillets. Il réalise le maximum de bouquets identiques, en utilisant toutes les fleurs. Combien de bouquets a-t-il réalisés ? Quelle est leur constitution ?

16 Carole souhaite réaliser une mosaïque sur un mur rectangulaire de dimensions 108 cm et 225 cm. Le mur doit être entièrement pavé avec des carreaux carrés, tous identiques, sans découpe.

a. Peut-elle utiliser des carreaux de 6 cm ?

b. Quelle est la dimension maximale des carreaux ?

c. Combien de carreaux utilisera-t-elle alors ?

Utiliser des nombres premiers

Exercice corrigé

Rends la fraction $\frac{280}{448}$ irréductible.

Correction

On commence par décomposer 280 et 448 en produits de facteurs premiers.

$280 = 2^3 \times 7 \times 5$ et $448 = 2^6 \times 7$

$\frac{280}{448} = \frac{2^3 \times 5 \times 7}{2^6 \times 7} = \frac{5}{2^3} = \frac{5}{8}$ qui est irréductible car 5 et 8 n'ont que 1 comme diviseur commun.

1 Les décompositions suivantes sont non abouties. Termine-les.

a. $2^2 \times 13 \times 25 =$ ....

b. $3 \times 15 \times 66 =$ ....

c. $7 \times 3^2 \times 9 \times 21 =$ ....

d. $23 \times 49 \times 61 =$ ....

2 Décompose les nombres suivants en produit de facteurs premiers.

306 : ....

....

124 : ....

....

540 : ....

....

2 220 : ....

....

3 On donne $a = 3^4 \times 7$ et $b = 2 \times 3^5 \times 7^2$. Donne le plus grand diviseur commun à a et b.

....

....

4 Détermine le premier nombre entier impair qui possède trois facteurs premiers différents.

....

5 Entoure les fractions simplifiables.

$\frac{4}{6}$ $\quad \frac{3}{19}$ $\quad \frac{15}{30}$ $\quad \frac{1}{82}$ $\quad \frac{42}{39}$

6 Simplifie chaque fraction en utilisant les critères de divisibilité.

a. $\frac{66}{30} =$ ....

b. $\frac{385}{165} =$ ....

c. $\frac{153}{189} =$ ....

d. $\frac{120}{90} =$ ....

7 Prouve que la fraction $\frac{74}{547}$ est irréductible.

....

....

8 Simplifie pour obtenir une fraction irréductible.

a. $\frac{4 \times 15 \times 14}{21 \times 10 \times 22} =$ ....

b. $\frac{2^2 \times 3 \times 5^3}{2 \times 3^3 \times 5^2} =$ ....

9 **En décomposant**

a. Écris 504 et 540 sous forme de produits de facteurs premiers.

....

....

b. Rends alors la fraction $\frac{504}{540}$ irréductible.

....

10 Rends la fraction $\frac{1\,204}{258}$ irréductible en effectuant une seule simplification et en détaillant les calculs.

....

....

....

11 La fraction $\frac{231}{712}$ est-elle irréductible ? Justifie.

....

....

....

Le point sur les nombres

1 Avec les nombres entiers

a. Parmi ces nombres, entoure en rouge les nombres entiers naturels et barre en bleu les nombres entiers relatifs.

$\frac{-4}{-2}$	12	$-0{,}25$	$\frac{-1}{82}$	12,12
$\frac{-2\pi}{\pi}$	-5	0	π	10^5

b. Explique pourquoi les nombres entiers naturels sont des nombres entiers relatifs.

....

....

2 Avec les quotients

a. Parmi ces nombres, entoure en rouge les nombres décimaux et barre en bleu les nombres rationnels (quotient de deux entiers relatifs).

$\frac{4}{-8}$	$\frac{4}{10}$	$-0{,}25$	$\frac{1}{82}$	$\sqrt{3}$
$\frac{-2{,}5}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2{,}5}{50}$	10^{-6}	4

b. Que remarques-tu ? Explique.

....

....

....

3

Parmi les nombres suivants, entoure ceux qui peuvent s'écrire sous forme de fraction avec un dénominateur qui soit une puissance de 10 (1 ; 10 ; 100 ; ...).

$$\frac{7}{5} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{-13}{25} \quad \frac{2}{11} \quad \frac{-42}{21} \quad \frac{-1}{7}$$

a. Comment nomme-t-on ces nombres ?

....

b. Pour les autres, donne une valeur arrondie au millième.

....

....

....

....

....

4 Nombres irrationnels

a. Pour chacun des nombres du tableau, indique à quel(s) ensemble(s) de nombres il appartient.

Nombre	Entier naturel	Entier relatif	Décimal	Rationnel
10^3				
$\frac{-2\pi}{3}$				
$\frac{25}{-5}$				
$2{,}3 \times 10^{-1}$				
$\sqrt{2}$				
$\frac{1{,}5}{30}$				
$\frac{1}{45}$				

b. Parmi les nombres réels, les nombres qui ne sont pas rationnels sont appelés irrationnels. Dans le tableau précédent, quels sont les nombres irrationnels ?

....

5 Nombres « amicaux »

a. Écris la liste des diviseurs de 220 et de 284.

220 : ....

284 : ....

b. Deux nombres sont « amicaux », si les sommes de leurs diviseurs sont égales. Montre que 220 et 284 sont amicaux.

....

....

....

c. Montre que 1 184 et 1 210 sont amicaux.

....

....

....

....

....

6 Nombres parfaits

Un nombre entier N est « parfait » s'il est égal à la demi-somme de ses diviseurs.

Exemple : 6 a pour diviseurs 1 ; 2 ; 3 et 6. De plus $6 = (1 + 2 + 3 + 6) \div 2$. Donc 6 est un nombre parfait.

a. Montre que 28 et 496 sont parfaits.

....

....

....

....

....

....

....

b. Trouve un nombre parfait qui a au moins deux diviseurs : 3 et 17.

....

....

7 Puissance de 2 et nombres parfaits

Pour obtenir un nombre parfait :
on ajoute successivement les puissances de 2.
Quand la somme est un nombre premier on le multiplie par le dernier nombre de la somme.

$1 + \mathbf{2} = \mathbf{3}$ est premier et $3 \times 2 = 6$ est parfait.
$1 + 2 + \mathbf{4} = \mathbf{7}$ est premier et $7 \times 4 = 28$ est parfait.
$1 + 2 + 4 + 8 + \mathbf{16} = \mathbf{31}$ est premier
et $31 \times 16 = 496$ est parfait.

a. Détermine le prochain nombre obtenu de cette façon.

....

....

....

....

b. Prouve que ce nombre est bien parfait.

....

....

....

....

....

....

....

8 Fractions décimales

Une fraction décimale est une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

a. Donne quelques exemples de fractions décimales.

....

....

b. Quelle est la décomposition en produit de facteurs premiers de 10 ? Déduis-en la décomposition en produit de facteurs premiers de 10^n.

....

....

c. « Si la décomposition en produit de facteurs premiers du dénominateur ne contient que des 2 et des 5 alors une fraction peut être écrite sous forme de fraction décimale. »

Montre que cette proposition est vraie pour les fractions suivantes.

$\frac{9}{4} =$ ....

....

$\frac{11}{125} =$ ....

....

$\frac{7}{32} =$ ....

....

d. Parmi les fractions suivantes certaines sont décimales. Repère-les en décomposant leur dénominateur en produit de facteurs premiers et écris-les sous forme de fraction décimale.

Fraction	Décomposition	Fraction décimale
$\frac{7}{16}$		
$\frac{2}{45}$		
$\frac{3}{15}$		
$\frac{25}{75}$		